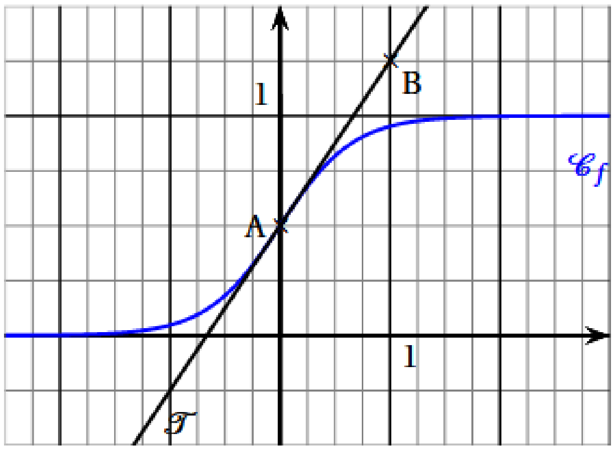
Exercice 1

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{1}{1+\mathrm{e}^{-3x}}.$$

On note $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal du plan.
On nomme A le point de coordonnées $\left(0\ ;\ \frac{1}{2}\right)$ et B le point de coordonnées $\left(1\ ;\ \frac{5}{4}\right)$.
On a tracé ci-dessous la courbe $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{T}$ la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 0.



Partie A : lectures graphiques

Dans cette partie, les résultats seront obtenus par lecture graphique. Aucune justification n'est demandée.

1. Déterminer l'équation réduite de la tangente $\mathscr{T}$.
2. Donner les intervalles sur lesquels la fonction f semble convexe ou concave.

Partie B : étude de la fonction

1. On admet que la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$.
   Déterminer l'expression de sa fonction dérivée f'.
2. Justifier que la fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
3. **a.** Déterminer la limite en $+\infty$ de la fonction f.
   b. Déterminer la limite en $-\infty$ de la fonction [.
4. Déterminer la valeur exacte de la solution α de l'équation $f(x) = 0,99$.

Partie C : Tangente et convexité

1. Déterminer par le calcul une équation de la tangente $\mathscr{T}$ à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 0.

On admet que la fonction f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.

On note f'' la fonction dérivée seconde de la fonction f.

On admet que f'' est définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f''(x) = \frac{9\mathrm{e}^{-3x}\left(\mathrm{e}^{-3x}-1\right)}{\left(1+\mathrm{e}^{-3x}\right)^3}.$$

2. Étudier le signe de la fonction f'' sur $\mathbb{R}$.

3. **a.** Indiquer, en justifiant, sur quel(s) intervalle(s) la fonction f est convexe.

b. Que représente le point A pour la courbe $\mathscr{C}_f$?

c. En déduire la position relative de la tangente $\mathscr{T}$ et de la courbe $\mathscr{C}_f$.
Justifier la réponse.

Exercice 2

Partie A

On considère la fonction f définie sur l'ensemble $]0\,;\,+\infty[$ par

$$f(x) = 1 + x^2 - 2x^2\ln(x).$$

On admet que f est dérivable sur l'intervalle et on note f' sa fonction dérivée

1. Justifier que $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 1$ et, en remarquant que $f(x) = 1 + x^2[1 - 2\ln(x)]$, justifier que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$.
2. Montrer que pour tout réel x de l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$, $\quad f'(x) = -4x\ln(x)$.
3. Étudier le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$, puis dresser le tableau de variations de la fonction sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.
4. Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans l'intervalle $[1\,;\,+\infty[$ et que $\alpha \in [1\,;\,\mathrm{e}]$.

On admet dans la suite de l'exercice, que l'équation $f(x) = 0$ n'admet pas de solution sur l'intervalle $]0; 1]$.

5. On donne la fonction ci-dessous écrit en Python. L'instruction *from lycee import ** permet d'accéder à la fonction ln.

```
from lycee import *

def f(x) :
    return 1 + x**2 - 2*x**2*ln(x)

def dichotomie(p)
    a=1
    b=2.7
    while b - a > 10**(-p) :
        if f(a)*f((a+b)/2) < 0 :
        |  b = (a+b)/2
        else :
        |  a = (a+b)/2
    return (a,b)
```

Il écrit dans la console d'exécution :

`>>> dichotomie(1)`

Parmi les quatre propositions ci-dessous, recopier celle affichée par l'instruction précédente? Justifier votre réponse (on pourra procéder par élimination).

Proposition A :	(1.75, 1.9031250000000002)
Proposition B :	(1.85, 1.9031250000000002)
Proposition C :	(2.75, 2.9031250000000002)
Proposition D :	(2.85, 2.9031250000000002)

Partie B

On considère la fonction g définie sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$, par

$$g(x) = \frac{\ln(x)}{1+x^2}.$$

On admet que g est dérivable sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$ et on note g' sa fonction dérivée.
On note $\mathcal{C}_g$ la courbe représentative de la fonction g dans le plan rapporté à un repère $\left(\text{O}~;~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$.

1. Démontrer que pour tout réel x de l'intervalle $]0~;~+\infty[$, $g'(x) = \dfrac{f(x)}{x\left(1+x^2\right)^2}$.
2. Démontrer que la fonction g admet un maximum en $x = \alpha$

On admet que $g(\alpha) = \dfrac{1}{2\alpha^2}$.

3. On note T_1 la tangente à $\mathcal{C}_g$ au point d'abscisse 1 et on note T_α la tangente à $\mathcal{C}_g$ au point d'abscisse α.

   Déterminer, en fonction de α, les coordonnées du point d'intersection des droites T_1 et T_α.